Государственное областное автономное образовательное учреждение
«Центр поддержки одаренных детей «Стратегия»

Рассмотрена и принята на заседании Педагогического совета ГОАОУ «Центр поддержки одаренных детей «Стратегия»

Протокол от
«31» 08 2018 г. № 1

УТВЕРЖДАЮ:
Директор ГОАОУ «Центр поддержки одаренных детей «Стратегия»
_____________ И.А. Шуйкова

Приказ от
«31» 08 2018 г. № 140/1-н

Российская Федерация Липецкая область г. Липецк * Государственное областное автономное образовательное учреждение * Центр поддержки одаренных детей «Стратегия» Для документов ИНН: 4825018775 ОГРН: 1024800823686

Образовательная программа по математике 8 класса, реализуемая в форме электронного обучения, с применением дистанционных образовательных технологий

Возраст обучающихся: 14-15 лет
Срок реализации: 1 год.

Авторы программы:
Фролова Е.В., преподаватель

г. Липецк, 2018

Модуль 3.Теорема Безу и ее применение

Цели и задачи модуля:

1. Развитие интереса к изучению математики.
2. Развитие умения использовать необходимый для каждой задачи теоретический материал.

Решение задач модуля 2

1. Докажите, что при умножении произведения двух целых чисел на разность их квадратов, всегда получается число, кратное 3.

Доказательство. Пусть x и y – целые числа, тогда $M = xy(x^2 - y^2) = xy(x + y)(x - y)$. Если x или y делится на 3, то M кратно 3. Если же ни x, ни y не делится на 3, то возможны 4 случая:

1) $x = 3n + 1$, y=$3m + 1$, $m, n \in N$, тогда $x - y$ делится на 3;
2) $x = 3n + 1$, y=$3m + 2$, $m, n \in N$, тогда $x + y$ делится на 3;
3) $x = 3n + 2$, y=$3m + 1$, $m, n \in N$, тогда $x + y$ делится на 3;
4) $x = 3n + 2$, y=$3m + 2$, $m, n \in N$, тогда $x - y$ делится на 3;

В каждом случае какой-либо множитель числа M делится на 3, следовательно, M кратно 3.

2. О натуральных числах a, p, q известно, что $ap + 1$ делится на q, а $aq + 1$ делится на p. Докажите, что $a > \frac{pq}{2(p+q)}$.

Доказательство.Очевидно, p и q взаимно просты (если d – их общий делитель, то он является также делителем числа $ap + 1$, а, следовательно, и числа $ap + 1 - ap = 1$). Поэтому число $ap + aq + 1$, которое делится и на p, и на q, делится на их произведение pq. Значит, $a(p + q) \geq pq - 1$, откуда $2a(p + q) > pq$ (левая часть увеличилась на $a(p + q) > 1$), и $a > \frac{pq}{2(p+q)}$.

3. Целые числа x, y, z удовлетворяют уравнению $x^3 + y^3 = z^3$. Доказать, что хотя бы одно из этих чисел делится на 3.

Доказательство.Докажем от обратного. Допустим все три числа x, y, z не делятся на 3. Тогда их можно представить в виде $x = 3a \pm 1$, $y = 3b \pm 1$, $z = 3c \pm 1$. Наше уравнение будет иметь вид:

$$(3a \pm 1)^3 + (3b \pm 1)^3 = (3c \pm 1)^3;$$

$$27a^3 \pm 27a^2 + 9a \pm 1 + 27b^3 \pm 27b^2 + 9b \pm 1 = 27c^3 \pm 27c^2 + 9c \pm 1;$$

$$9(3a^3 \pm 3a^2 + a + 3b^3 \pm 3b^2 + b - 3c^3 \mp 3c^2 - c) = \pm 1 \mp 1 \mp 1.$$

Левая часть равенства делится на 9. Правая часть не делится на 9 при любом из вариантов знака ±. Мы пришли к противоречию. А значит одно из чисел делится на 3.

Теория
Многочлены

Многочлен$P_n(x)$относительно переменной x вида

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

где a_0, a_1, …, a_n–действительныечисла и $a_0 \neq 0$, называется *многочленом, расположенным по убывающим степенямх*, или многочленом, представленным в *каноническом виде*.

Числа a_0, a_1, …, a_nназываются его *коэффициентами*, одночлен a_0x^n–его*старшим членом*, а число *n–степенью многочлена*.

Если у многочлена, представленного в каноническом виде, отсутствует некоторая степень x, то коэффициент соответствующего одночлена равен нулю.

Два многочлена, представленные в каноническом виде, *тождественно равны*, если равны их степени и равны коэффициенты при одинаковых степенях x.

Если многочлен $P_n(x)$, $Q_m(x)$ и $K_l(x)$ таковы, что справедливо тождественное равенство

$$P_n(x) = Q_m(x) \cdot K_l(x),$$

то говорят, что каждый из многочленов $Q_m(x)$ и $K_l(x)$ является *делителем* многочлена $P_n(x)$. При этом говорят, что многочлен $P_n(x)$*делитсянацело* на многочлен $Q_m(x)$ (или $K_l(x)$), и тогда многочлен $K_l(x)$ (соответственно $Q_m(x)$) называют частным от деления многочлена $P_n(x)$ на многочлен $Q_m(x)$ (соответственно $K_l(x)$).

Доказывается, что если многочлен степени n делится на многочлен степени m, то частным от деления будет многочлен степени $n-m$ и этот многочлен единственный.

Отсюда следует, что если многочлен $P_n(x)$ степени n делится на многочлен $Q_n(x)$ степени n, то $P_n(x) = C \cdot Q_n(x)$, где $C \neq 0$, т.е. коэффициенты этих многочленов пропорциональны.

Свойства делимости многочленов:

1. Если многочлен $P_n(x)$ делится на многочлен $Q_m(x)$, а многочлен $Q_m(x)$ делится на многочлен $F_l(x)$, то многочлен $P_n(x)$ делится на многочлен $F_l(x)$.

2. Если многочлены $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ делятся на многочлен $K_l(x)$, то многочлены $P_n(x)+Q_m(x)$ и $P_n(x)-Q_m(x)$ делятся на многочлен $K_l(x)$, а многочлен $P_n(x)\cdot Q_m(x)$ делится на многочлен $K_l^2(x)$
3. Если многочлен $P_n(x)$ делится на многочлен $Q_m(x)$, то произведение многочлена $P_n(x)$ на любой многочлен $K_l(x)$также делится на многочлен $Q_m(x)$.
4. Многочлен $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ тогда и только тогда делятся друг на друга, когда $P_n(x)=C\cdot Q_m(x)$, где $C\neq 0$.
5. Если многочлен $P_n(x)=Q_m(x)\cdot K_l(x)$делится на двучлен $x-\alpha$, то хотя бы один из многочленов $-Q_m(x)$ или $K_l(x)$ делится на $x-\alpha$.

Разделить с остатком многочлен $P_n(x)$ на многочлен $T_m(x)$ $(m\leq n)$ это значит найти многочлены $q_l(x)$и $r_k(x)$ такие, что справедливо тождественное равенство

$$P_n(x) = T_m(x)q_l(x) + r_k(x),$$

где $0\leq k<m$. При этом многочлен $q_l(x)$ называется *частным*, а многочлен $r_k(x)$ –*остатком*.

Заметим, что если многочлен $P_n(x)$ делится с остатком на многочлен $T_m(x)$, то существует единственная пара многочленов $q_l(x)$ и $r_k(x)$таких, что $P_n(x) = T_m(x)q_l(x) + r_k(x)$,причем $l=n-m$, $0\leq k<m$.

Любой многочлен $P_n(x)$ делится на многочлен $T_m(x)$ $(m\leq n)$ либо нацело, либо с остатком. В первом случае (при делении нацело) частное от деления, а во втором случае (при делении с остатком) частное и остаток можно найти *методом неопределенных коэффициентов*.

Метод неопределенных коэффициентов.

Даны многочлены:

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

степени n и

$$T_m(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} + \cdots + b_{m-1}x + b_m$$

степени m $(m\leq n)$.

Положим частное

$$q_{n-m}(x) = \frac{a_0}{b_0}x^{n-m} + c_1x^{n-m-1} + \cdots + c_{n-m} \quad (1)$$

и остаток

$$r_l(x) = d_0x^{m-1} + d_1x^{m-2} + \cdots + d_{m-1} \qquad (2)$$

где $0\leq l\leq m-1$, числа $c_1, c_2, \ldots, c_{n-m}$и$d_0, d_1, \ldots, d_{m-1}$ не определены.

Напишем тождественное равенство

$$P_n(x) = T_m(x)q_{n-m}(x) + r_l(x), \qquad (3)$$

Перемножая многочлены $T_m(x)$ и $q_{n-m}(x)$ и приводя подобные члены, в правой части равенства (3) получим многочлен n-й степени, который записывается в каноническом виде. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x этого многочлена и многочлена $P_n(x)$, получим систему n уравнений, решая которую находим числа $c_1, c_2, \ldots, c_{n-m}, d_0, d_1, \ldots, d_{m-1}$.

Если окажется, что все числа $d_0, d_1, \ldots, d_{m-1}$ равны нулю, то это означает, что многочлен $P_n(x)$ делится нацело на многочлен $T_m(x)$. Если хотя бы один из коэффициентов $d_0, d_1, \ldots, d_{m-1}$ отличен от нуля, то многочлен $P_n(x)$ делится на многочлен $T_m(x)$ с остатком, при этом степень остатка l равна максимальной степени одночлена от x правой части (2), при котором коэффициент равен нулю.

Деление многочлена на многочлен“ столбиком ” (или“углом”).

В общем случае при делении многочлена $P_n(x)$ на многочлен $T_m(x)$ ($m \leq n$) “***столбиком***” многочлены $P_n(x)$ и $T_m(x)$ располагают по убывающим степеням x. Затем старший член многочлена $P_n(x)$ делят на старший член многочлена $T_m(x)$ и получают старший член частного – многочлена $q(x)$. Найденный старший член многочлена $q(x)$ умножают затем на делитель – многочлен $T_m(x)$ и полученный многочлен вычитают из многочлена $P_n(x)$. В результате вычитания получается некоторый многочлен $D_1(x)$ степень которого меньше n.

Если степень многочлена $D_1(x)$ меньше m, то процесс деления окончен, при этом многочлен $D_1(x)$ – остаток. Если степень многочлена $D_1(x)$ больше или равна m, то описанная процедура деления повторяется для многочлена $D_1(x)$, т.е. старший член многочлена $D_1(x)$ делят на старший член многочлена $T_m(x)$ и полученный многочлен вычитают из многочлена $D_1(x)$. В результате вычитания получается многочлен $D_2(x)$, степень которого меньше $n - 1$. Если степень многочлена $D_2(x)$ меньше $n - 1$, то процесс деления окончен, при этом многочлен $D_2(x)$ – остаток. Если же степень многочлена $D_2(x)$ больше или равна m, то описанная процедура деления повторяется для многочлена $D_2(x)$.

Процесс продолжается до тех пор, пока степень полученного на k-м шаге многочлена $D_k(x)$ станет меньше степени многочлена $T_m(x)$, т.е. меньше m. При этом многочлен $D_k(x)$– остаток.

Пример 1.

$$
\begin{array}{r|l}
-\,2x^4-3x^3+4x^2+1 & x^2-1 \\
\underline{2x^4-2x^2} & \overline{2x^2-3x+6} \\
-\,-3x^3+6x^2+1 & \\
\underline{-3x^3+3x} & \\
-\,6x^2-3x+1 & \\
\underline{6x^2-6} & \\
-3x+7 &
\end{array}
$$

Пример 2.

$$
\begin{array}{r|l}
-\;\;-3x^5+5x^4+3x-1 & -x^2+x+1 \\
\underline{-3x^5+3x^4+3x^3} & \overline{3x^3-2x^2+x-1} \\
-\;\;2x^4-3x^3+3x-1 & \\
\underline{2x^4-2x^3-2x^2} & \\
-\;\;-x^3+2x^2+3x-1 & \\
\underline{-x^3+x^2+x} & \\
-\;\;x^2+2x-1 & \\
\underline{x^2+x-1} & \\
3x &
\end{array}
$$

Итак,

$$5x^4-3x^5+3x-1=(3x^3-2x^2+x-1)(-x^2+x+1)+3x,$$

или

$$\frac{-3x^5+5x^4+3x-1}{-x^2+x+1}=3x^3-2x^2+x-1+\frac{3x}{-x^2+x+1},$$

При делении многочлена $P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$, расположенного по убывающим степеням x, на двучлен $x-\alpha$ применяется метод сокращенного деления, называемый *схемой Горнера*. Этот метод есть непосредственное следствие метода неопределенных коэффициентов. Заметим, что при делении многочлена $P_n(x)$ степени n на двучлен $x-\alpha$ в частном получается многочлен $Q_{n-1}(x)=a_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+b_2x^{n-3}+\cdots+b_{n-1}$, степени $n-1$, а в остатке – число (в частности, нуль). По методу неопределенных коэффициентов имеем

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$
$$=(a_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+b_2x^{n-3}+\cdots+b_{n-1})(x-\alpha)+r,$$

т.е.

$$
\begin{gathered}
a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n= \\
a_0x^n+b_1x^{n-1}+b_2x^{n-2}+\cdots+b_{n-2}x^2+b_{n-1}x \\
-a_0\alpha x^{n-1}-b_1\alpha x^{n-2}-b_2\alpha x^{n-3}-\cdots-b_{n-2}\alpha x-b_{n-1}\alpha+r,
\end{gathered}
\tag{4}
$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях в левой и правой части равенства (4), находим

$$
\begin{cases}
a_1=b_1-\alpha a_0, \\
a_2=b_2-\alpha b_1, \\
\quad\cdots \\
a_{n-1}=b_{n-1}-\alpha b_{n-2}, \\
a_n=r-\alpha b_{n-1}.
\end{cases}
$$

откуда получаем рекуррентные формулы для нахождения коэффициентов частного b_1, b_2, …, b_{n-1} и остатка r:

$$b_1 = a_1 + \alpha a_0,$$
$$b_2 = a_2 + \alpha b_1,$$
$$\ldots$$
$$b_{n-1} = a_{n-1} + \alpha b_{n-2},$$
$$r = a_n + \alpha b_{n-1}.$$

Практически вычисление коэффициентов частного $Q_{n\text{-}1}(x)$ и остатка r проводится по следующей схеме (схема Горнера):

$$\begin{array}{c|ccccccc}
 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_{n-1} & a_n \\
 & \downarrow & + & + & + & & + & + \\
 & & \alpha a_0 & \alpha b_1 & \alpha b_2 & \ldots & \alpha b_{n-2} & \alpha b_{n-1} \\
\hline
\alpha & a_0 & b_1 & b_2 & b_3 & \ldots & b_{n-1} & r
\end{array}$$

В этой схеме, начиная с коэффициента b_1, каждое число третьей строки получается из предыдущего числа этой строки умножением на число α и прибавлением к полученному результату соответствующего числа первой строки, стоящего над искомым числом.

Пример 3. Используя схему Горнера разделить многочлен

$$4x^3 - x^5 + 32 - 8x^2 \quad \text{на} \quad x + 2.$$

Решение. Напишем делимое в каноническом виде, т. е. в виде

$$-x^5 + 0 \cdot x^4 + 4x^3 - 8x^2 + 0 \cdot x + 32.$$

Применяя схему Горнера, имеем

$$\begin{array}{c|cccccc}
 & -1 & 0 & 4 & -8 & 0 & 32 \\
 & & + & + & + & + & + \\
 & & 2 & -4 & 0 & 16 & -32 \\
\hline
-2 & -1 & 2 & 0 & -8 & 16 & 0
\end{array}$$

Итак, частное $Q_4(x) = -x^4 + 2x^3 - 8x + 16$ и остаток $r = 0$. Следовательно,

$$4x^3 - x^5 + 32 - 8x^2 = (x + 2)(-x^4 + 2x^3 - 8x + 16).$$

Пример 4. Используя схему Горнера разделить многочлен $2x^2 - 3x^3 - x + x^5 + 1$ на $x + 1$.

Решение. Запишем делимое в каноническом виде, т. е. в виде

$$x^5 + 0 \cdot x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x + 1.$$

Применяя схему Горнера, имеем

	1	0	−3	2	−1	1
	+	−1 +	1 +	2 +	−4 +	5
−1	1	−1	−2	4	−5	6

Итак, частное $Q_4(x) = x^4 - x^3 - 2x^2 + 4x - 5$ и остаток $r = 6$, т. е.

$$2x^2 - 3x^3 - x + x^5 + 1 = (x+1)(x^4 - x^3 - 2x^2 + 4x - 5) + 6.$$

При делении многочлена $P_n(x)$ на $x - \alpha$ имеем тождественное равенство

$$P_n(x) = (x - \alpha)Q_{n-1}(x) + r.$$

Оно справедливо, в частности, при $x=\alpha$, т.е.$P_n(\alpha)=r$.

Следующая теорема позволяет найти остаток от деления многочлена на двучлен, не находя частного.

Теорема Безу. *Остаток от деления многочлена*$P_n(x)$ *на двучлен*$x - a$*равен значению многочлена*$P_n(x)$ *при*$x = \alpha$, *т.е.*$r = P_n(\alpha)$.

При делении многочлена $P_n(x)$ на двучлен вида $ax+b$ получается остаток, равный значению этого многочлена при $x = -\frac{b}{a}$, т.е. $r = P_n\left(-\frac{b}{a}\right)$.

Число α называется *корнем многочлена*$P_n(x)$, если при $x= \alpha$ числовое значение многочлена равно нулю, т.е. $P_n(\alpha)=0$.

Следствия теоремы Безу:

1. Многочлен $P_n(x)$ делится на $x - \alpha$ тогда и только тогда, когда число α является корнем многочлена $P_n(x)$.
2. Многочлен $x^n - a^n$ делится на $x - a$ при любом натуральном n, причем
$$\frac{x^n - a^n}{x - a} = x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + \cdots + x^2a^{n-3} + xa^{n-2} + a^{n-1}.$$
3. Многочлен $x^{2n} - a^{2n}$ делится на $x+a$ при любом натуральном n, причем
$$\frac{x^{2n} - a^{2n}}{x + a} = x^{2n-1} - x^{2n-2}a + x^{2n-3}a^2 + \cdots - x^2a^{2n-3} + xa^{2n-2} - a^{2n-1}.$$
4. Многочлен $x^{2n+1}+a^{2n+1}$ делится на $x+a$ при любом натуральном n, причем
$$\frac{x^{2n+1} + a^{2n+1}}{x + a} = x^{2n} - x^{2n-1}a + x^{2n-2}a^2 + \cdots - x^2a^{2n-2} - xa^{2n-1} + a^{2n}.$$

В общем случае многочлен $P_n(x)$ представим единственным образом в виде произведения многочленов, степень каждого из которых не больше 2, т.е. каждый из которых либо двучлен, либо квадратный трехчлен, не имеющий корней.

Возможность выделения у многочлена линейных множителей связана с наличием у этого многочлена корней.

***Утверждения о корнях многочлена*.**

1. Многочлен n-ой степени имеет не более n действительных корней (с учетом их кратности).
2. Многочлен нечетной степени имеет хотя бы один действительный корень.
3. (***Теорема Виета в общем виде***) Если $x_1, x_2, \ldots, x_n$– действительные корни многочлена

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n,$$

то имеют место следующие равенства:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \frac{-a_1}{a_0},$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n = \frac{a_2}{a_0},$$

$$x_1x_2x_3 + \cdots + x_{n-2}x_{n-1}x_n = \frac{-a_3}{a_0},$$

…

$$x_1x_2x_3 \cdots x_n = \frac{(-1)^n a_n}{a_0}.$$

4. Если $P_n(x) = Q_m(x) \cdot K_l(x)$, то каждый корень многочлена $P_n(x)$ есть корень хотя бы одного из многочленов $Q_m(x)$ и $K_l(x)$, а каждый корень многочлена $Q_m(x)$ и каждый корень многочлена $K_l(x)$ являются корнями многочлена $P_n(x)$.
5. Если α– корень многочлена $P_n(x)$, то $P_n(x) = (x - \alpha)Q_{n-1}(x)$, где – некоторый многочлен степени $n - 1$.

Для того, чтобы несократимая дробь p/q (p– целое, q– натуральное) была корнем многочлена

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

с целыми коэффициентами,необходимо, чтобы число p было делителем свободного члена a_n, а число q– делителем старшего коэффициента a_0.

В частности, если многочлен $P_n(x)$ имеет целые коэффициенты и a_0=1, то рациональными корнями такого многочлена могут быть только целые числа, которые являются делителями свободного члена a_n.

Примеры задач

1. Решите уравнение

$$x^2y^4 - 16xy^3 - 4xy + x^2 + 68y^2 = 0.$$

Ответ. (0,0), (4,2), (-4,-2).

Решение.Преобразуем выражение в левой части уравнения:
$y^2(x^2y^2 - 16xy + 64) - 64y^2 - 4xy + x^2 + 68y^2 = y^2(xy-8)^2 + x^2 - 4xy + 4y^2 = \left(y(xy-8)\right)^2 + (x-2y)^2 = 0.$
Тогда

$$\begin{cases} y(xy-8) = 0, \\ x - 2y = 0. \end{cases}$$

Откуда получаем ответ.

2. Все коэффициенты многочлена $P(x)$ — целые числа. Известно, что $P(1) = 1$ и что $P(n) = 0$ при некотором целом положительном n. Найдите n.

Ответ. 2.

Решение. Воспользуемся тем, что $P(x) - P(y)$ делится на $x - y$. Отсюда $P(n) - P(1) = -1$ делится на $n - 1$. Значит, $n - 1 = \pm 1$. Откуда $n = 0$ или $n=2$. Поскольку мы ищем натуральный корень, то решение единственное: $n = 2$.

3. Найдите свободный член многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами, если известно, что он по модулю меньше тысячи, и $P(19)=P(94)=$ $=1994$.

Ответ. 208.

Решение.Пусть a_0– свободный член многочлена $P(x)$. Тогда

$$P(x)=x\cdot Q(x)+a_0,$$

где $Q(x)$ – многочлен с целыми коэффициентами. Поэтому $P(19)=19n+a_0$, а $P(94)=94m+a_0$, где m и n– целые числа. Из условия вытекает, что $19n=94m$, следовательно, $n=94k$, $m=19k$. Итак, $19 \cdot 94k+a_0=1994$, откуда$a_0=1994 - 1786k$. Из условия $|a_0|<1000$ следует, что $k=1$, $a_0=208$.

4. Разложите многочлен:

а) $x^8 + x^4 + 1$ на три множителя,

б) $x^5 + x + 1$ на два множителя

с целыми коэффициентами.

Решение.а) $x^8 + x^4 + 1 = x^8 + 2x^4 + 1 - x^4 = (x^4+1)^2 - (x^2)^2 = (x^4 + x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1) = ((x^2+1)^2) - x\text{^}2)(x^4 - x^2 + 1) = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)(x^4 - x^2 + 1),$

б) $x^5+x+1=(x^5+x^4+x^3)-(x^4+x^3+x^2)+(x^2+x+1)=(x^3-x^2+1)(x^2+x+1)$.

5. При каком значении a многочлены x^4+ax^2+1 и x^3+ax+1 имеют общий корень?

Решение.Пусть многочлены $f(x)=x^4+ax^2+1$ и $g(x)=x^3+ax+1$ имеют общий корень x_0. Тогда, умножив второй многочлен на x и вычитая из первого, получим многочлен, имеющий тот же корень, а этот многочлен – просто $f(x)-xg(x)=1-x$. Его единственный корень $-x_0=1$. Многочлены $f(x)$ и $g(x)$ имеют этот корень при $a=-2$; чтобы убедиться в этом, достаточно приравнять нулю $f(1)$ и $g(1)$– оба эти числа равны $a+2$.

6. Существует ли многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами такой, что $P(0)=19$, $P(1)=85$, $P(2)=1985$.

Указание. Многочлен искать в виде $P(x)=ax(x-1)+bx+c$.

Решение.Подставляя в тождество $P(x)=ax(x-1)+bx+c$ поочередно $x=0$, $x=1$, $x=2$,

получаем для определения коэффициентов треугольную систему уравнений:

$$\begin{cases} c=19, \\ b+c=85, \\ 2a+2b+c=1985. \end{cases}$$

Из которой находим $c=19$, $b=66$, $a=917$ и получаем ответ $P(x)=917x^2-851x+19$.

7. При какиха, b и c многочлен $x^4+ax^3+bx^2+cx+4$ является точным квадратом другого многочлена и принимает значение 1 при x= - 1.

Ответ. a=4, b=8, c=8;a=8, b=20, c=1;a=0, b=4, c=0; a=-4, b=0, c=8.

Решение. Будем искать многочлен в видеМ $=(x^2+mx+2)^2$. Учитывая, что два многочлена равны, когда равны коэффициенты при одинаковых степенях и условие задачи получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 2m=a, \\ m^2+4=b, \\ 4m=c, \\ 1-a+b-c+4=1. \end{cases}$$

Решая систему, получим первую пару ответов.Находя многочлен в виде М $=(x^2+mx-2)^2$, аналогичным образом получаем вторую пару.

8. Разложите многочлен на множители:

а) $x^5 + x^3 + x$,

б) $x^4 + 4$.

Ответ. а) $x(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$,

б) $(x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2)$.

9. Если в произведении двух чисел первый множитель увеличить на 1, а второй уменьшить на 1, то произведение увеличится на 2011. Как изменится произведение исходных чисел, если, наоборот, первый множитель уменьшить на 1, а второй увеличить на 1?

Ответ.Уменьшится на 2013.

Решение.Пусть изначально были числа x и y (с прозведениемxy). После того, как первый множитель увеличили на 1 а второй уменьшили на 1, получилось (x+1)(y-1)=xy+y-x-1. Произведение увеличилось на 2011, то есть y-x-1=2011 или y-x=2012. Если же первый множитель уменьшить на 1, а второй увеличить на 1 получится (x-1)(y+1)=xy-y+x-1=xy-2012-1=xy-2013. То есть произведение уменьшилось на 2013.

10. В произведении трех натуральных чисел каждый сомножитель уменьшили на 3. Могло ли произведение при этом увеличиться ровно на 2016?

Ответ. Да. Например, $1 \cdot 1 \cdot 676$.

Решение. В качестве примера подходит произведение $1 \cdot 1 \cdot 676$. После указанной операции получается $(-2) \cdot (-2) \cdot 673 = 2692 = 676 + 2016$. Отметим, что приведённый пример — единственный. Очевидно, что если все числа больше трех, то произведение может только уменьшиться. Так как произведение трех натуральных чисел положительно, то увеличенное произведение также положительно, поэтому меньше 3 должно быть ровно два каких-нибудь сомножителя. Проверяя возможные случаи (два числа по 1; два числа по 2; одно 1, второе 2). Удовлетворяет условию только случай, когда два из сомножителей равнялись 1, а третий —

некоторому числу **a**. Их произведение было равно **a**, а после уменьшения превратилось в $(-2)^2(a - 3) = 4a - 12$. Значит, при $4a - 12 = a + 2016$ условие соблюдается. Решая это уравнение, получаем $a = 676$.

11. Разложите многочлен на множители:

а) $x^5 - 2x^4 - 8x^3 + 16x^2 + 16x - 32$,

б) $4(x+5)(x+6)(x+10)(x+12) - 3x^2$.

Решение.

а) $x^5 - 2x^4 - 8x^3 + 16x^2 + 16x - 32 = x^4(x-2) - 8x^2(x-2) + 16(x-2) = (x-2)((x^2)^2 - 2 \cdot x^2 \cdot 4 + 4^2) = (x-2)(x^2-4)^2 = (x-2)^3 \cdot (x+2)^2$;

б) $4(x+5)(x+6)(x+10)(x+12) - 3x^2 = 4\big((x+5)(x+12)\big)\big((x+6)(x+10)\big) - 3x^2 = 4(x^2+17x+60)(x^2+16x+60) - 3x^2 = 4(t+x)t - 3x^2 = 4t^2 + 4tx + x^2 - 4x^2 = (2t+x)^2 - (2x)^2 = (2t-x)(2t+3x) = (2x^2+31x+120) \cdot (2x^2+35x+120) = 4(x+8)\left(x+\frac{15}{2}\right)\left(x - \frac{-35+\sqrt{265}}{4}\right)\left(x - \frac{-35-\sqrt{265}}{4}\right)$.

Здесь $t = x^2 + 16x + 60$, а квадратные трехчлены раскладывадись на множителя с использованием формулы для корней квадратного уравнения (через дискриминант).

12. Положительные числа x и y таковы, что $x^2 > x + y, x^4 > x^3 + y$. Докажите, что $x^3 > x^2 + y$.

Доказательство.

1 способ. Перепишем условие в виде $x^2 - x = x(x-1) > y$, $x^4 - x^3 = x^3(x-1) > y$. Тогда $x > 1$ — иначе $x(x-1) \le 0 < y$. Следовательно, $x^3 - x^2 = x^2(x-1) > x(x-1) > y$.

2 способ. Так как $x^2 > x+y$ и $x > 1$, $x^3 > x^2 + xy > x^2 + y$.

3 способ. Перемножим неравенства $x(x-1) > y$ и $x^3(x-1) > y$ (это возможно, так как $x-1 > 0$) и извлечем квадратный корень из обеих частей полученного неравенства. Получим искомое неравенство $x^2(x-1) > y$.

Замечание. Как видим, условие $x^4 > x^3+y$ — лишнее, но есть и использующие его решения.

Задания для самостоятельной работы

1. Докажите, что при любом натуральном n число $n^3 + 3n^2 + 6n + 8$ является составным.
2. Найдите все целые a, при которых уравнение $x^2 + ax + a = 0$имеет целый корень.
3. Длины a, b, ссторон некоторого треугольника удовлетворяют соотношению $2(a^8 + b^8 + c^8) = (a^4 + b^4 + c^4)^2$. Докажите, что треугольник прямоугольный.

Литература

1. Васильев Н.Б., Гутенмахер В.Л., Раббот Ж.М., Тоом А.Л. Заочные математические олимпиады.- М.:Наука, 1986.
2. Всероссийские олимпиады школьников по математике 1993-2009: Заключительные этапы / Н. Х. Агаханов и др. Под ред. Н. Х. Агаханова. - М.:МЦНМО, 2010.
3. Гальперин. Г.А., Толпыго А.К. Московские математические олимпиады. М.: Просвещение, 1986.
4. Журналы "Математика в школе", "Квант".
5. Кордемский Б.А., Ахадов А.А. Удивительный мир чисел. М.: Просвещение, 1986.
6. Спивак, А.В. Математический кружок.- М.: Посев, 2003.
7. Фарков, А.В. Математические олимпиады.- М.: Экзамен,2006 .
8. http://kvant.mccme.ru/ - журнал "Квант".
9. http://lib.mexmat.ru/forum/ - форум мехмата МГУ, обсуждаются вопросы, проблемы и задачи по математике.

10. http://olympiads.mccme.ru/mmo/ - Московская математическая олимпиада.
11. http://www.metaschool.ru - Интернет-кружки, интернет-олимпиады, интернет-репетитор.
12. http://www.rusolymp.ru/ - портал Всероссийской олимпиады школьников.
13. http://www.school.mipt.ru/ - ЗФТШ МФТИ.
14. http://www.turgor.ru/ - Турнир Городов - международная математическая олимпиада для школьников.
15. http://www.zaba.ru/ - Математические олимпиады и олимпиадные задачи.

Модуль 2. *Целые числа и многочлены. Признаки делимости*

Цели и задачи модуля:

1. Развитие интереса к изучению математики.

2. Развитие умения логически верно выстраивать решение, рассматривать все возможные случаи.

3. Развитие умения выстраивать необычные конструкции, помогающие анализировать условие здачи и решать ее.

4. Развитие умения использовать необходимый для каждой задачи теоретический материал.

Решение задач модуля 1

1. На острове живут только рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Однажды все они сели по кругу, и каждый сказал: "Среди двух моих соседей есть лжец!". Затем они сели по кругу в другом порядке, и каждый сказал: "Среди двух моих соседей нет рыцаря!". Могло ли на острове быть 2017 человек?

Ответ. Не могло.

Решение. В первом круге обоими соседями каждого лжеца были рыцари. Сопоставив каждому лжецу его правого соседа в этом круге, убеждаемся, что рыцарей на острове не меньше, чем лжецов. Во втором круге обоими соседями каждого рыцаря были лжецы. Сопоставив каждому рыцарю его правого соседа в этом круге, убеждаемся, что рыцарей на острове не больше, чем лжецов. Получается, что рыцарей и лжецов на острове поровну. Но тогда на острове чётное число жителей, а число 2017 - нечётное.

2. На одной из улиц дачного поселка только пять домов. Они окрашены в разные цвета, и занимают их семьи поэта, писателя, критика, журналиста и редактора. В доме каждой семьи живет любимая птичка. Глава семьи получает на завтрак любимый им напиток, после чего отправляется в город, пользуясь любимым способом передвижения. Поэт пользуется велосипедом. Редактор живет в красном доме. Критик живет в крайнем доме слева, рядом расположен голубой дом. Тот, кто ездит на мотоцикле, живет в среднем доме. Тот, кто живет в зеленом доме, расположенном рядом с белым, справа от него, всегда отправляется в город пешком. В доме, где живет снегирь, на завтрак всегда бывает молоко. Тот, кто на завтрак получает какао, живет в доме, соседнем с тем домом, где живет синица. В желтом доме на завтрак подают чай. Живущий рядом с любителем канареек утром пьет чай. Писатель пьет только кофе. Тот, кто ездит на автомобиле, любит пить томатный сок. В доме журналиста живет попугайчик. А у кого живет сорока?

Ответ. Сорока живет у писателя в крайнем справа зеленом доме.

Решение. Единственно возможное соответствие:

Цвет дома	желтый	голубой	красный	белый	зеленый
В доме живет	критик	поэт	редактор	журналист	писатель
На завтрак пьет	чай	какао	молоко	сок	кофе
Способ передвижения		велосипед	мотоцикл	автомобиль	пешком
Птица	синица	канарейка	снегирь	попугай	сорока

3. Математик шел домой вверх по течению ручья со скоростью, в полтора раза большей, чема скорость течения, и держал в руках шляпу и палку. На ходу он бросил в ручей шляпу, перепутав ее с палкой. Вскоре, заметив ошибку, он бросил палку в ручей и побежал назад со скоростью вдвое больше той, с которой шел вперед. Догнав плывущую шляпу, он мгновенно достал ее из воды, повернулся и как ни в чем ни бывало пошел домой с прежней скоростью. Через 40 секунд после того, как он догнал шляпу, он встретил палку, плывущую ему навстречу. Насколько раньше пришел бы он домой, если бы все время шел вперед?

Ответ. На две с половиной минуты.

Решение. Пусть математик бежал назад t секунд. Тогда палка плыла назад $t+40$ секунд. Обозначим скорость течения v. Тогда скорость ходьбы равна $1,5v$, бега – $3v$. Расстояние, которое он бежал назад равно расстоянию, которое плыла палка до встречи с ним, плюс расстояние, которое он шел вперед, выловив шляпу, до встречи с палкой:

$$3vt = 1,5v * 40 + v(t+40),$$

Откуда $t = 50$ секунд. Время, которое он потерял, равно 50 секунд плюс время, которое ему потребовалос, чтобы пройти то же расстояние, а оно вдвое больше. Всего получается $50 + 50 * 2 = 150$ секунд.

Теория

В задачах на свойства целых чисел и многочленов с целыми коэффициентами требуется знание определенной теории и умение ее применять. В задачах на делимость необходимо довать исчерпывающие (предусматривающие все возможные случаи) или решения или решения содержащие доказательство того, или иного утверждения. Кроме того, в такого рода задачах зачастую возможно несколько способов решения, конечно, желательно выбирать наиболее оптимальное и красивое.

1. Натуральные и целые числа

Числа 1,2,3, ..., употребляемые для счета, называются натуральными. Множество натуральных чисел обозначается N.

Множество, состоящее из натуральных чисел, целых *отрицательных* чисел (т.е. чисел $-1, -2, -3, \ldots, -n, \ldots$) и нуля (с арифметическими операциями), называется *множеством целых чисел*, а сами эти числа называются *целыми числами*. Множество целых чисел обозначается символом Z.

2. Свойства основных арифметических действий

1. $m + n = n + m, m \cdot n = n \cdot m$ — *коммутативность*;
2. $(m+n)+k = m+(n+k), m(nk) = (mn)k$ — *ассоциативность*;
3. $m(n+k) = mn + mk$ — *дистрибутивность*.

3. Определение и свойства делимости

Целое число a делится на целое число $b \neq 0$, если существует такое целое число c, что $a = bc$.

Если a делится на b, то ka делится на b (здесь и далее все числа целые, это специально не оговаривается).

Если a и b делятся на c, то сумма $a+b$ и разность $a-b$ делятся на c.

Если a делится на k, b делится на n, то произведение ab делится на произведение kn.

Если a делится на b и b делится на c, то a делится на c.

4. Теорема о делении с остатком

Для любого целого числа a и натурального числа b существует единственная пара чисел q и r таких, что $a = bq + r$, где q— целое, r — натуральное или нуль, причем r может принимать лишь b различных значений $0; 1; 2; \ldots; b - 1$.

Заметим, что если остаток r равен нулю, то число a делится на b.

5. Взаимно простые числа

Два числа называются взаимно простыми, если они не имеют общих натуральных делителей, кроме единицы.

Если число a делится на каждое из двух взаимно простых чисел b и c, то оно делится на их произведение bc.

Если произведение ab делится на число c, причем числа a и c взаимно простые, то b делится на c.

6. Основная теорема арифметики

Каждое натуральное число $n > 1$ имеет единственное (с точностью до порядка множителей) разложение на простые множители $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$, где $p_1, p_2, \ldots, p_k$ — попарно различные простые числа, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ — натуральные числа.

Указанное в теореме представление называется каноническим разложением числа n.

7. Наибольший общий делитель

Общим делителем чисел a и b называется число, на которое делятся оба числа a и b. Наибольший общий делитель чисел a и b обозначается НОД$(a; b)$.

Для нахождения НОД$(a; b)$ можно использовать алгоритм Евклида, выполняя последовательно деление с остатком:

$$\begin{gathered} a = bq_0 + r_1,\ 0 < r_1 < b, \\ b = r_1 q_1 + r_2,\ 0 < r_2 < r_1, \\ r_1 = r_2 q_2 + r_3,\ 0 < r_3 < r_2, \\ \ldots \\ r_{n-2} = r_{n-1} q_{n-1} + r_n,\ 0 < r_n < r_{n-1}, \\ r_{n-1} = r_n q_n. \end{gathered}$$

(Процесс заканчивается после того, как первый раз получен нулевой остаток.) Тогда НОД$(a; b) = r_n$.

Замечание. Причем,

r_n= НОД(r_n, r_{n-1})=НОД$(r_{n-1}, r_{n-2}) = \ldots$=НОД$(r_1, b)$=НОД$(a, b)$.

Другой способ нахождения НОД$(a; b)$ состоит в разложении чисел a и b на простые множители, отыскании общих множителей, входящих в оба разложения, и вычислении произведения общих простых множителей в наименьших степенях, с которыми эти множители входят в разложение a и b.

Пример. Найти НОД$(360, 8400)$.

Решение. а) находим каноническое разложение чисел 360 и 8400: $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$, $8400 = 5^2 \cdot 2^4 \cdot 7 \cdot 3$;

б) выписываем общие множители, входящие в канонические разложения чисел 360 и 8400: $2, 3, 5$;

в) наименьшая степень числа 2, входящего множителем в каждое из разложений данных чисел, равна 3; наименьшая степень числа 3 равна 1; наименьшая степень числа 5 равна 1;

г) находим НОД$(360, 8400) = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1 = 120$.

8. Наименьшее общее кратное

Общим кратным чисел a и b называется число, которое делится на a и на b. Наименьшее общее кратное обозначается НОК$(a; b)$.

Для нахождения НОК$(a; b)$ можно разложить на простые множители a и b и вычислить произведение всех простых множителей, входящих хотя бы в одно из разложений, причем простые множители, входящие в оба разложения, надо брать в наибольшей из степеней, с которыми этот множитель входит в разложение a и b.

Заметим, что НОД$(a; b)$ $\cdot$ НОК$(a; b) = ab$.

Пример. Найти НОК$(360, 8400)$.

Решение. а) находим каноническое разложение чисел 360 и 8400: $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$, $8400 = 5^2 \cdot 2^4 \cdot 7 \cdot 3$;

б) выписываем простые множители, входящие в канонические разложения хотя бы одного из данных чисел 360 и 8400: $2, 3, 5, 7$;

в) наибольшая степень числа 2, входящего множителем в каждое из разложений данных чисел, равна 4; наибольшая степень числа 3 равна 2; наибольшая степень числа 5 равна 2; наибольшая степень числа 7 равна 1;

г) находим НОК$(360, 8400) = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 = 25200$.

9. Разложение на множители выражений вида $x^n - a^n$ и $x^{2n+1} + a^{2n+1}$

Имеют место формулы: $x^n - a^n = (x-a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + \ldots + xa^{n-2} + a^{n-1})$, $x^{2n+1} + a^{2n+1} = (x+a)(x^{2n} - x^{2n-1}a + \ldots - xa^{2n-1} + a^{2n})$, где $n \in N$.

10. Принцип Дирихле

Если $m > n$, то при отнесении каждого из m предметов к одному из n классов хотя бы в один класс попадает не менее двух предметов.

Пример 1. Докажите, что если a и b — целые числа, то $ab(a^2 - b^2)$ делится на 6.

Доказательство. Поскольку $6 = 2 \cdot 3$ и числа 2 и 3 — взаимно простые, то для решения задачи достаточно показать делимость числа $ab(a^2 - b^2)$ на 2 и на 3.

Если хотя бы одно из чисел a или b четно, то $ab(a^2 - b^2)$ кратно 2. Если же оба числа a и b нечетны, то число $a + b$ четно и, значит, $ab(a^2 - b^2) = ab(a+b)(a-b)$ кратно 2.

Если хотя бы одно из чисел a или b кратно 3, то произведение $ab(a^2 - b^2)$ также кратно 3. Осталось рассмотреть случай, когда оба числа a и b не делятся на 3. По теореме о делении с остатком каждое из чисел при делении на 3 может давать остатки 1 или 2. Если остатки от деления чисел a и b на 3 одинаковые, то тогда разность $a - b$ делится на 3, если же остатки разные, то сумма $a + b$ делится на 3, так как сумма остатков равна 3. Во всех случаях число $ab(a^2 - b^2)$ кратно 3.

Пример 2. Сумма двух целых чисел равна 101, а разность их квадратов — простое число. Найдите эти числа.

Решение. Обозначим искомые числа через a и b. Тогда $a^2 - b^2 = p$, где p — простое число, т.е. $(a-b)(a+b) = p$, поскольку $a + b = 101$, то $101(a - b) = p$. Отсюда следует, что p делится на 101, но p — простое, значит, $p = 101$. Имеем: $a - b = 1$. Так как $a + b = 101$, находим $a = 51$, $b = 50$.

11. Некоторые признаки делимости натуральных чисел

Любое число n представимо в десятичной системе счисления в виде

$n = a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0$, где $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$ могут принимать значения $0, 1, 2, \ldots, 9$, а число a_k — значения $1, 2, \ldots, 9$; позиционная запись числа следующая

$n = \overline{a_k a_{k-1} a_{k-2} \ldots a_2 a_1 a_0}$.

Числа $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ и 9 называют цифрами.

1. Число n делится на 2 только в том случае, когда a_0 делится на 2.

2. Число n делится на 4 только в том случае, когда число $\overline{a_1a_0}$ делится на 4.

3. Число n делится на 8 только в том случае, когда число $\overline{a_2a_1a_0}$ делится на 8.

4. Число n делится на 3 только в том случае, когда сумма всех его цифр делится на 3.

5. Число n делится на 9 только в том случае, когда сумма всех его цифр делится на 9.

6. Число n делится на 5 только в том случае, когда a_0 делится на 5.

7. Число n делится на 25 только в том случае, когда число $\overline{a_1a_0}$ делится на 25.

8. Число n делится на 19 только в том случае, когда число его десятков, сложенное с удвоенным числом единиц, делится на 19.

9. Число n делится на 13 только в том случае, когда разность суммы первой, третьей, пятой и т.д. граней и суммы второй, четвертой, шестой и т.д. граней делится на 13. (число разбивается на грани слева-напрво по 3 цифры).

Пример. Найти наименьшее натуральное число вида $\overline{123X43Y}$, которое нацело делится на 3.

Решение. Сумма цифр числа данного вида равна $1+2+3+4+3+X+Y = 13+X+Y$. Наименьшее значение этой суммы, при которой заданное число делится на 3, равно 15, т.е. когда $X+Y=2$. Среди всех чисел данного вида при условии, что $X+Y=2$, имеется три числа 1230432, 1232430, 1231431, из которых наименьшим является число $a = 1230432$.

Кроме значения 2, сумма $X+Y$ для чисел указанного вида и делящихся на 3, может принимать только значения $5, 8, 11, 14, 17$. Ясно, что если $X+Y=5$, то наименьшим является число 1230435, а если $X+Y=8$, то наименьшим будет число 1230438; оба найденных числа больше числа a. Во всех оставшихся трех случаях ($X+Y=11$, $X+Y=14$, $X+Y=17$) в качестве наименьшего (в каждом из них) будет также получаться число, большее, чем число a.

Примеры задач

1. Докажите, что при любом целом n число n^5-5n^3+4n делится на 120.

Решение. Разложим данное число на множители:

$$n^5-5n^3+4n = n(n^4-5n^2+4) = n(n^2-1)(n^2-4) =$$

$$= (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2).$$

В результате получилось произведение пяти последовательных целых чисел.

Одно из таких чисел обязательно делится на 5, одно из трех последовательных целых чисел делится на 3, а из четырех последовательных чисел одно делится на 4, другое - на 2. Поэтому их произведение делится на 120.

2. Даны натуральные числа a и b такие, что число $\frac{a+1}{b}+\frac{b+1}{a}$ является целым. Докажите, что наибольший общий делитель чисел a и b не превосходит числа $\sqrt{a+b}$.

Решение. Имеем:

$$\frac{a+1}{b}+\frac{b+1}{a} = \frac{a^2+b^2+a+b}{ab}.$$

Пусть d - наибольший общий делитель чисел a и b. Так как ab делится на d^2, то a^2+b^2+a+b делится на d^2. Число a^2+b^2 также делится на d^2. Поэтому $a+b$ делится на d^2 и $\sqrt{a+b} \geq d$.

3. Докажите, что число $n^5 - n, n \in N$, делится на 30.
Решение. Представим
$$n^5 - n = (n-1)n(n+1)(n^2+1).$$
Любое натуральное число $n > 1$ можно представить как $5k-3$, или $5k-2$, или $5k-1$, или $5k$, или $5k+1$, $k \in N$ Произведение трех последовательных натуральных чисел $(n-1)n(n+1)$ всегда кратно 6, а при $5k-1$, $5k$ и $5k+1$ оно, кроме того, кратно 5, следовательно, оно кратно 30. При остальных значениях $5k-3$ и $5k-2$ произведение $(n-1)n(n+1)$, оставаясь кратным 6, не будет кратным 5, но тогда кратным 5 становится последний множитель заданного числа, а именно $n^2+1 = 25k^2 - 30k + 10$ и $n^2 + 1 = 25k^2 - 10k + 5$. Таким образом, оказывается $n^5 - n$ делится на 30 при любом значении $n \in N$.

4. Целые числа a, b, c и d удовлетворяют равенству $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$. Доказать, что число abc делится на 4.
Решение. Квадрат четного числа делится на 4, а квадрат нечетного числа дает при делении на 4 остаток 1. Если числа a, b, c — нечетные, то d^2 должен давать при делении на 4 остаток 3, что невозможно. Если среди чисел a, b, c два нечетных и одно четное, то d^2 должен давать при делении на 4 остаток 2, что также невозможно. Значит, среди чисел a, b, c есть два четных числа, откуда произведение abc делится на 4.

Такое возможно, например, 32 + 42 + 122 = 132.

5. Найдется ли такое натуральное число n, при котором $2n + n^2$ оканчивается цифрой 5?
Решение. Число $2n$ может оканчиваться одной из цифр 2, 4, 8, 6 (с периодом 4), а число n^2 — одной из цифр: 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1, 0 (с периодом 10). Отсюда число $2n + n^2$ будет оканчиваться на 5, если 2n оканчивается на 4 или на 6, то есть когда число n — четно, но тогда $2n + n^2$ — четно, значит, не может оканчиваться на цифру 5.

6. Вычислительное устройство вычитает из каждого трехзначного числа сумму кубов его цифр. Какое число нужно ввести в устройство, чтобы результат оказался максимальным?
Ответ: 620 или 621.
Решение. Пусть ввели некоторое трехзначное число. Тогда устройство выдаст число
$$(100a + 10b + c) - (a^3 + b^3 + c^3) = a(100 - a^2) + b(10 - b^2) + c(1 - c^2).$$
Результат будет наибольшим тогда и только тогда, когда каждое слагаемое максимально, то есть при $a = 6, b = 2, c = 0$ или $c = 1$.

7. Последовательность строится по следующему закону. На первом месте стоит число 7, далее за каждым числом стоит сумма цифр его квадрата, увеличенная на 1. Какое число стоит на 2000 месте?
Решение. Вычислим несколько первых членов последовательности: 7; 14; 17; 20; 5; 8; 11; 5; … — число 5 повторилось. Значит, у последовательности есть период длины 3: числа 5; 8; 11 далее будут повторяться. На пятом месте — пятерка, тогда

для любого $k > 0$ на $3k + 2$-м месте также будет пятерка. Так как 2000 = 3 × 666 + 2, то 2000-м месте стоит число 5.

8. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 составляют всевозможные семизначные числа, в которых каждая цифра участвует только один раз. Доказать, что сумма этих чисел делится на 9.
Решение. Сопоставим каждому такому числу x число $88888888-x$, оно также состоит из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и каждая цифра используется один раз. Сумма чисел в каждой паре 8888888. Всего таких чисел 7!, значит таких пар 7! / 2. Значит вся сумма равна 7! × 4444444. Число 7! делится на 9, значит и сумма чисел делится на 9.

9. Незнайка выписал по кругу 11 натуральных чисел. Для каждых двух соседних чисел он посчитал их разность. В результате среди найденных разностей оказалось четыре единицы, четыре двойки и три тройки. Докажите, что Незнайка где-то допустил ошибку.
Решение. Запишем каждую из разностей со знаком плюс, если в соответствующей паре чисел большее стоит перед меньшим по часовой стрелке, и со знаком минус в противном случае. Получается 11 разностей между числом и следующим за ним почасовой стрелке; значит, сумма всех этих чисел равна нулю, то есть четному числу. Это невозможно, поскольку среди них ровно семь нечетных чисел - четыре числа вида ±1 и три числа вида ±3.

10. Найти все трехзначные числа, кратные 7 и представимые в виде суммы квадрата и куба одного и того же целого числа.
Ответ. 252 и 392.
Решение. Согласно условию $x = a^2 + a^3$, где $100 \leq x < 1000$, a – целое число. Так как x- трехзначное число, то $4 < a < 10$, тогда $x = a^2(1 + a)$, и, так как x кратно 7, тогда a^2 или $1 + a$ кратно 7. Если $a = 6$, то $x = 6^2(1 + 6) = 252$ - кратно 7. Если $a = 7$, то $x = 7^2(1 + 7) = 392$ - кратно 7.

11. Доказать, что число $a + b$ делится на 7, если на 7 делится число $a^2 + 9ab + b^2$.
Доказательство. $a^2 + 9ab + b^2 = 7ab + a^2 + 2ab + b^2 = 7ab + (a + b)^2$. Значит $(a + b)^2$ делится на 7, но 7 – простое число, тогда $a + b$ делится на 7.

Устные задачи на делимость с комментариями

Задача 1. *Какую цифру нужно приписать к числу 97 справа и слева, чтобы полученное число делилось на 27?*
Удвоенная неизвестная цифра дополняет сумму известных цифр числа до величины, кратной 9-ти. Сумма известных чисел - четная (16). Удвоенная неизвестная цифра (а) - также четная величина. Следовательно, сумма цифр искомого числа - четная и равна 18-ти. (2а меньше или равна 18 и сумма цифр искомого числа не больше 34-х). Итак, а = 1, искомое число - 1971.

Задача 2. *Делимое в шесть раз больше делителя, а делитель в шесть раз больше частного. Чему равны делимое, делитель и частное?*
Искомое частное равно 6; оно показывает, во сколько раз делимое больше делителя.
Делитель в 6 раз больше частного и равен 36.
Делимое в 6 раз больше делителя и равно 216.

Задача 3. *Найти наименьшее натуральное число, которое при делении на 7 дает в остатке 6, а при делении на 9 остаток равен 8..*
В обоих случаях - как при делении искомого числа на 7, так и при делении его на 9 остаток на единицу меньше делителя. Увеличив делимое на 1, получим число, которое делится без остатка и на 7, и на 9. Наименьшее такое число - 63. Искомое число на 1 меньше и равно 62.

Задача 4. *Сколько существует натуральных чисел, меньших 1000, которые не делятся ни на 5 ни на 7?*
Среди 999 чисел, меньших 1000, 199 чисел кратны 5 : [999 : 5] = 199 *.
В этом же интервале имеются 142 числа, кратных 7 : [999 : 7] = 142* .
Среди 142 чисел, кратных 7, имеются числа, которые делятся также и на 5, то есть кратные 35.
Всего таких чисел 28: [999 : 35]= 28* .
Эти 28 чисел уже учтены в числе 199, найденном ранее.
Поэтому количество чисел, меньших 1000, которые делятся либо на 5, либо на 7, равно 199 + 142 - 28 = 313.
В рассматриваемом интервале остается 999 - 313 = 686 чисел, которые не делятся ни на 5, ни на 7.
* [N] - целая часть числа N . Например, [13,45] = 13.

Задача 5. *Коля и Вася живут в одном доме, на каждой лестничной клетке которого 4 квартиры. Коля живет на пятом этаже, в картире 83, а Вася - на 3-ем этаже в квартире 169. Сколько этажей в доме ?*
Если вести сквозной отсчет этажей, начиная с первого подъезда, то Коля живет на 21- м этаже [83 : 4] = 20 (3). В своем подъезде Коля живет на 5-м этаже, поэтому в подъездах, предшествующих Колиному, 16 этажей. 16 делится лишь на числа, кратные 2-м, поэтому в доме может быть либо 16 этажей, либо 8 этажей (вариант четырехэтажного дома исключаем, поскольку Коля живет на 5 этаже). Вася живет на 43 этаже, считая от первого этажа первого подъезда [169 : 4] = 42 (1).Значит в подъездах, предшествующих Васиному, 40 этажей. 40 делится на 8, но не делится на 16, следовательно, в доме 8 этажей.
Замечание.
В процессе решения задачи мы определили числа этажей (16 и 40) в двух разных группах подъездов.
Число этажей в каждой группе подъездов кратно числу этажей в доме, оно равно произведению числа этажей в доме на число подъездов в группе.Задача сводится к нахождению общего делителя чисел 16 и 40 (с условием, что делитель этот не меньше 5-ти).

Задача 6. *Женщина несла на базар корзину яиц. Прохожий нечаянно толкнул женщину, корзина упала и яйца разбились. Виновник несчастья, желая возместить потерю, поинтересовался, сколько яиц было в корзине. - Точно не помню, ответила* *женщина, - но знаю, что когда я вынимала из корзины по 2, по 3, по 4, по 5, по 6 яиц, в корзине оставалось одно яйцо, а когда я вынимала по 7, в корзине ничего не оставалось. Сколько яиц было в корзине ?*

Если бы из корзины вынули одно яйцо, оставшееся количество яиц делилось бы нацело на 2, 3, 4, 5, и 6. Числа, для которых это выполняется, - это 60 и числа, кратные 60-ти. Задача сводится к нахождению числа, кратного 60-ти, которое делилось бы на 7 после добавления 1 (или, иными словами, при делении на 7 давало бы остаток 6). Число 60 при делении на 7 дает остаток 4. Следовательно, нужно найти число, кратное 4-ем, которое было бы на 6 больше числа, кратного 7-ми. Это число - остаток от деления общего числа яиц на 7, оно равно $7 \cdot 2 + 6 = 20$. ** В этом числе остаток 4 содержится пятикратно, значит, первоначально в корзине было $60 \cdot 5 + 1 = 301$ яйцо. Замечание. Следующее, большее число, обладающее указанным свойством, равно $7 \cdot 6 + 6 = 48$. Такой остаток может быть получен при 12-кратном повторении порции 60 яиц ($48 : 4 = 12$). В этом случае, число яиц в корзине составило бы $60 \cdot 12 + 1 = 721$ яйцо - вариант, в рассматриваемой ситуации нереальный. Такую корзину женщине не поднять.

Задача 7. *Покупатель взял в магазине пакет молока, стоимостью 3,45 гривны, коробку творога, стоимостью 3,6 гривны, 6 пирожных и 3 килограмма сахара. Когда кассирша выбила чек на 29,6 гривны, покупатель потребовал проверить расчет и исправить ошибку. Как определил покупатель, что счет неверен ?*

Стоимость купленных товаров каждого вида выражается числом, кратным 3-м (для товаров первых двух видов кратна 3-м цена, для остальных - количество купленных товаров). Если каждое из слагаемых делится на 3, то и сумма должна делится на 3. Число 29,6 на 3 не делится; следовательно, расчет неверен.

Задача 8. *Костин дедушка очень любит давать ему задачи на числа. Вот одна из его задач: Дано пятизначное число 25762. Какую цифру и на каком месте надо дописать, чтобы полученное число делилось на 36 ?*

Искомое число делится на 4 и 9. Дописав к данному числу цифру 5, получим число, кратное 9-ти. Чтобы полученное число делилось на 4, цифру 5 допишем в разделе десятков. Искомое число - 257652.

Задача 9. *В команде рептилий были только черепашки. Черепашек было больше 50-ти, но меньше 100. На церемонии открытия Олимпийских Игр Зверей эту команду никак не удавалось построить рядами по 2, 3, или 4 животных, так как одного животного всегда не хватало в последнем ряду. Поэтому пришлось построить команду черепашек рядами по 5 животных в каждом ряду. Сколько всего черепашек было в команде рептилий?*

Если искомое число черепашек увеличить на 1, оно будет делиться на 2, 3, 4. Наименьшее общее кратное этих чисел 12. Возьмем под подозрение числа, кратные 12, большие 50 и меньшие 100. Это будут числа: 60, 72, 84 и 96. Искомое число должно быть на 1 меньше указанных чисел и делиться на 5. Из нашего ряда подходит только число 96, так как: $96 - 1 = 95$, получаем число, делящееся на 5. Итак, 95 черепашек было в команде рептилий.

Задания для самостоятельной работы

1. Докажите, что при умножении произведения двух целых чисел на разность их квадратов, всегда получается число, кратное 3.

2. О натуральных числах a, p, q известно, что $ap + 1$ делится на q, а $aq + 1$ делится на p. Докажите, что $a > \frac{pq}{2(p+q)}$.

3. Целые числа x, y, z удовлетворяют уравнению $x^3 + y^3 = z^3$. Доказать, что хотя бы одно из этих чисел делится на 3.

Литература

1. Васильев Н.Б., Гутенмахер В.Л., Раббот Ж.М., Тоом А.Л. Зоачные математические олимпиады.- М.:Наука, 1986.
2. Всероссийские олимпиады школьников по математике 1993–2009: Заключительные этапы / Н. Х. Агаханов и др. Под ред. Н. Х. Агаханова. – М.:МЦНМО, 2010.
3. Гальперин. Г.А., Толпыго А.К. Московские математические олимпиады. М.: Просвещение, 1986.
4. Журналы "Математика в школе", "Квант".
5. Кордемский Б.А., Ахадов А.А. Удивительный мир чисел. М.: Просвещение, 1986.
6. Спивак, А.В. Математический кружок.- М.: Посев, 2003.
7. Фарков, А.В. Математические олимпиады.– М.: Экзамен,2006 .
8. http://kvant.mccme.ru/ - журнал "Квант".
9. http://lib.mexmat.ru/forum/ - форум мехмата МГУ, обсуждаются вопросы, проблемы и задачи по математике.
10. http://olympiads.mccme.ru/mmo/ - Московская математическая олимпиада.
11. http://www.metaschool.ru - Интернет-кружки, интернет-олимпиады, интернет-репетитор.
12. http://www.rusolymp.ru/ – портал Всероссийской олимпиады школьников.
13. http://www.school.mipt.ru/ - ЗФТШ МФТИ.
14. http://www.turgor.ru/ - Турнир Городов - международная математическая олимпиада для школьников.
15. http://www.zaba.ru/ - Математические олимпиады и олимпиадные задачи.

Модуль 1. Олимпиадные задачи для первого знакомства. Логические задачи

Цели и задачи модуля

1. Знакомство с историей олимпиадного движения по математике.
2. Анализ особенностей нестандартных задач по математике.
3. Развитие интереса к изучению математики.

1. Теоретический материал (подготовлен Воробьевым Г.А.)

1.1. Современное состояние олимпиадного движения

Олимпиады возникли в Древней Греции как состязания в ловкости, силе, красоте. Первая олимпиада состоялась в 776 г. до н. э. Математические соревнования по решению задач также называются олимпиадами, хотя они проводятся в настоящее время с периодом не в четыре года, а, как правило, ежегодно.

В России конкурсы по решению задач начали проводиться с 1886 г., в Венгрии и Румынии - с 1894 г., в других странах - значительно позже.

В 1934 г. была проведена первая математическая олимпиада школьников в Ленинградском университете. Оргкомитет возглавил профессор Б. Н. Делоне. С 1935 г. математические олимпиады проводятся в Московском университете. После Великой Отечественной войны в проведение олимпиад включились многие высшие учебные заведения различных городов страны. Так, с 1947 г. стали регулярно проводиться олимпиады в Вологде, Иванове, Иркутске, Смоленске, с 1949 г. - в Саратове, с 1950 г. - в Белоруссии и ряде других республик нашей страны. Но в большинстве областей и городов олимпиады не проводились.

В 1960 г. была проведена экспериментальная Всероссийская математическая олимпиада, в которой приняли участие команды 9 союзных республик и 13 областей Российской Федерации. С 1967 г., с года организации Министерства просвещения СССР, их стали называть Всесоюзными олимпиадами.

Всероссийская олимпиада школьников по математике проводится в пять этапов, последовательно охватывая образовательное пространство Российской Федерации на разных уровнях:

- школьный;
- муниципальный;

- региональный;
- заключительный.

Первый этап — школьный — проводится общеобразовательными учреждениями в октябре каждого учебного года.

Второй этап — муниципальный — проводится органами местного самоуправления или местными (муниципальными) органами управления образованием в ноябре-декабре каждого учебного года.

Третий этап — региональный — проводится в субъектах Российской Федерации совместно государственными органами управления образованием субъектов Российской Федерации и советами ректоров высших учебных заведений в январе-феврале каждого учебного года. Допускается совместное проведение третьего этапа несколькими субъектами Российской Федерации.

Четвертый этап – заключительный– проводится Министерством образования и науки Российской Федерации и Федеральным агентством по образованию по согласованию с соответствующими государственными органами управления образованием субъектов Российской Федерации ежегодно в апреле каждого учебного года.

Ранее проводился и зональный этап в семи федеральных округах (Южном, Уральском, Центральном, Приволжском, Сибирском, Северо-Западном, Дальневосточном) государственными органами управления образованием субъектов Российской Федерации в марте каждого учебного года. Последние три года четвертый этап не проводился.

В начальных этапах Всероссийской математической олимпиады школьников принимают участие сотни тысяч учащихся. Около 200 самых талантливых из них становятся участниками заключительного этапа. На этом этапе Всероссийской олимпиады определяется и состав сборной команды России для участия в Международной математической олимпиаде школьников (ММО), на которой наша команда традиционно занимает высокие места. В 2007 году команда России (впервые в своей истории, но не в истории СССР) стала абсолютным победителем ММО в неофициальном командном зачете, завоевав при этом 5 золотых и 1 серебряную медали,обойдя на 3 балла традиционного победителя ММО команду Китая.

В 2009 году с 10 по 23 июля в г. Бремен (Германия) прошла 50-ая международная математическая олимпиада. На данных соревнованиях Российская команда показала следующие результаты: золотых медалей – 5, серебряных медалей – 1.

51-я по счету Международная математическая олимпиада (IMO 2010) проходила с 2 по 14 июля в г. Астане (Казахстан). В ней участвовало 517 школьников, из них менее 50 девушек, остальные – юноши. Побороться за звание лучшего юного математика планеты изъявили желание школьники из 97 стран мира.

В 2011 году в 52-й математической олимпиаде, прошедшей Амстердаме, принимали участие 564 участника из 101-й страны. Победителем в этом году, как и на протяжении последних нескольких лет, стал Китай. Второе место заняла сборная США (едва ли не наполовину состоящая из китайцев). Третье место – у Сингапура, четвертое – у России. Затем Таиланд, Турция, КНДР, Тайвань. В десятку входит Иран. Национальная сборная России завоевала шесть медалей: две золотые и четыре серебряные.

В 2012 году в Мар-дель-Плата в Аргентине 100 стран представляли 548 участников. Республика Корея обогнала Китай и вышла не только в 10 лидеров, но и заняла первое место. Второе занял Китай и третье – США. Россияне четвертые с четырьмя золотыми и двумя серебряными медалями.

В 2013 году олимпиада проходила в Санта Марте в Колумбии. Туда съехалось 548 участников из 97 стран. Китай возвращает себе лидерство отодвигая Корею на 2 место, США и Россия сохраняют свои позиции.

В 2014 году олимпиада состоялась в Кейптауне (Южно-Африканская Республика). В ней приняли участие 560 участников из 101 страны мира. Китай удерживает свое лидерстов, а США улучшают свои результаты и выходят на второе место. Россия по-прежнему на 4 месте, но уже с тремя золотыми и тремя серебряными медалями.

В 2015 году Чиангмай (Таиланд) собрал 577 участников из 104 стран. Это самая большая по численности участников и участвующих стран олимпиада. Но для сборной России она оказалось неудачной – в неофициальном зачете мы только восьмые с шестью серебряными медалями. А вот США наконец-то добились первого места, поменявшись местами с Китаем, Республика Корея оказалась на третьем месте. В первую десятку вошли также Австралия (6), Канада (9), Иран (7), Вьетнам (5), Корейская народно-демократическая республика (4).

В общей сложности в соревновании 2016 года в Гонконге приняли участие 602 школьника из 109 стран мира. В этом году Россию представляли три школьника из Москвы, два из Санкт-Петербурга и один из Рыбинска.Лучшим в российской сборной оказался Григорий Юргин, который идеально справился с четырьмя задачами из шести и занял 19-21 место с результатом 33 балла из 42. Также золотые награды получили Руслан Салимов (31 балл), Иван Фролов (30 баллов) и Павел Губкин (29 баллов). Серебряную медаль заработал Никита Карагодин (23 балла), бронзу сборной принес Георгий Вепрев (19 баллов). А список стран, вошедших в пятерку лучших выглядит следующим образом:

1. Соединённые Штаты Америки
2. Республика Корея
3. Китайская Народная Республика
4. Сингапур
5. Тайвань

59 международная олимпиада состоялась в июле 2018 года в Клуж-Напока (Румыния). Всего в соревновании участвовало 594 человека из 116 стран мира.Отличные результаты наших школьников вывели нашу команду в тройку сильнейших в математической сфере.В этом году список участников олимпиады, представляющих российскую команду, включал шесть школьников из разных уголков России: 5 из которых: Егор Рябов и Артур Герасименко (Москва), Владимир Петров и Станислав Крымский (Санкт-Петербург), Марат Абдурахманов (Челябинск) получили золотые награды и Сергей Лучинин (Киров) – серебряную. Первая пятерка в этом году выглядела следующим образом:

1. Соединённые Штаты Америки
2. Россия
3. Китайская Народная Республика
4. Украина
5. Таиланд

Отметим, что Россия не занимала призовых мест с 2010 года.

Значительно продвинулось развитие олимпиад благодаря использованию новых информационных и коммуникационных технологий (ИКТ). Так, широкую известность в школах России получили Международный конкурс-игра «Кенгуру. Математика для всех» (М.И. Башмаков), «Русский медвежонок» (И.С. Рубанов), дистанционная олимпиада «Эйдос» (А.В. Хуторской), олимпиада МГУ и газеты “Московский комсомолец” “Воробьевы горы”, школьная математическая олимпиада "Сократ", олимпиада Всероссийского заочного физико-математического лицея "Авангард" (http://avangard-school.nm.ru/), Московский интеллектуальный марафон, турниры Архимеда, математические бои, турниры городов и др.

Математические бои в г.Липецке проводились в течение многих лет Травкиным М.Б. и сейчас они возобновлены под эгидой департамента науки и образования. Международный конкурс-игра «Кенгуру. Математика для всех» впервые проводился в Липецкой области по инициативе доцента кафедры прикладной математики и информационных технологий ЛГПУ Ершовой А.А., последние годы проведение конкурса курирует департамент науки и образования.

1.2. Нестандартные задачи по математике

Олимпиадные задачи в математике — термин для обозначения круга задач, для решения которых ***обязательно*** требуется неожиданный и оригинальный подход.

Олимпиадные задачи можно найти в журналах “Квант”, “Математика в школе”, в виде отдельных сборников, большое количество задач приведено на различных сайтах сети Интернет.

Пример задачи олимпиадного типа, известной со времён Эвклида. Доказать, что существует бесконечно много простых чисел.

Задача решается методом от противного. Предположив, что простых чисел конечное число N, рассматриваем число, следующее за их произведением. Очевидно, что оно не делится ни на одно из использованных в произведении простых чисел, давая в остатке 1. Значит либо оно само простое, либо оно делится на простое число, не учтённое в ранее указанном списке. В любом случае простых чисел, по крайней мере, $N + 1$. Противоречие с предположением о конечности.

Не существует единого метода решения олимпиадных задач. Напротив, количество методов постоянно пополняется. Некоторые задачи можно решить несколькими разными методами или комбинацией методов. Характерная особенность олимпиадных задач в том, что решение с виду несложной проблемы может потребовать применения методов, использующихся в серьёзных математических исследованиях. Ниже приводится (по определению) неполный список методов решения.

- Принцип Дирихле.
- Математическая индукция.
- Рекурсия.
- Метод итераций.
- Инвариант.
- Элементы теории графов.
- Игры со стратегией.
- Задачи на взвешивание.
- Нестандартные уравнения и неравенства.
- Метод перебора.
- Комбинаторика.
- Метод геометрических преобразований.
- Логические задачи.
- Решение методами другой науки (замена алгебраической задачи геометрической или физической и наоборот).
- Правило крайнего.
- Решение с конца.
- Построение контрпримера.
- Подсчёт двумя способами.
- Метод аналогий.
- Провокационный метод.
- Вспомогательное построение.
- Переход в пространство большего числа измерений.
- Вспомогательная раскраска.
- Доказательство от противного.

1.3. Дистанционные олимпиады

Дистанционная олимпиада позволяет решать многие образовательные задачи: развитие умений исследовать объекты и генерировать идеи в конкретной образовательной области, выражать мысли в письменной и графической формах, оперировать информацией по теме с помощью компьютерных средств.

1. 4. Советы участнику олимпиады

1. Прочитайте условия всех задач и наметьте, в каком порядке вы будете их решать. Учтите, что обычно задачи упорядочены по возрастанию их трудности.

2. Если условие, на ваш взгляд, можно понять разными способами, то не выбирайте самый удобный для себя, а обращайтесь к дежурному с вопросом.

3. Если задача решилась слишком легко это подозрительно, возможно, вы неправильно поняли условие или где-то ошиблись.

4. Если задача не решается попробуйте её упростить (взять меньшие числа, рассмотреть частные случаи и т.д.) или порешать ее «от противного», или заменить числа буквами и т. д.

5. Если неясно, верно ли некоторое утверждение, то пытайтесь его поочередно то доказывать, то опровергать (совет А.Н. Колмогорова).

6. Не зацикливайтесь на одной задаче: иногда отрывайтесь от нее и оценивайте положение. Если есть хоть небольшие успехи, то можно продолжать, а если мысль ходит по кругу, то задачу лучше оставить (хотя бы на время).

7. Если устали, отвлекитесь на несколько минут (посмотрите на облака или просто отдохните).

8. Решив задачу, сразу оформляйте решение. Это поможет проверить его правильность и освободит внимание для других задач.

9. Каждый шаг решения надо формулировать, даже если он кажется очевидным. Удобно записывать решение в виде нескольких утверждений (лемм). Это помогает при проверке и обсуждении работы.

10. Перед тем как сдать работу, перечитайте её «глазами проверяющих», смогут ли они в ней разобраться?

2. Примеры задач

Задача 1. Какое наибольшее количество воскресений может быть в году?

Решение. Среди любых семи последовательно идущих дней обязательно встречается одно воскресенье. Поскольку 365=52*7+1, 366=52*7+2, то в любом году получается 52 семерки дней (недель) и еще остаток – 1 или 2 дня. В каждой семерке ровно одно воскресенье, а в остатке – одно или ни одного. Всего получается не более 53 воскресений.

Ответ. 53.

Задача 2. Пароход от Горького до Астрахани идет 5 суток, а от Астрахани до Горького – 7 суток. Сколько дней будут плыть по течению плоты от Горького до Астрахани?

Ответ. 35 суток.

Решение. Пусть x км/ч скорость парохода, а y км/ч – скорость течения.тогда, так как расстояние, пройденное пароходом в Астрахань и обратно одинаковое, получим:

$$5(x+y)=7(x-y),$$

$$6y-x=0,$$

$$x=6y.$$

Таким образом, расстояние от Горького до Астрахани будет $5(x+y)=5(6y+y)=35y$ км, тогда время будет $35y/y=35$ суток.

Задача 3.Имеется 24 карандаша четырех цветов – по 6 карандашей каждого цвета. ИхИх раздали 6 ребятам так, что каждый получил по 4 карандаша. Какое наименьшее количество ребят всегда можно выбрать, чтобы у них гарантированно нашлись карандаши всех цветов вне зависимости от распределения карандашей?

Решение. Покажем, что всегда можно выбрать 3 ребят так, чтобы у них нашлись карандаши всех цветов. Так как карандашей каждого цвета 6, а каждому досталось по 4 карандаша, то кому-то достались карандаши по крайней мере двух различных цветов. Осталось добавить к нему двух ребят, у которых есть карандаши оставшихся двух цветов.

Покажем теперь, как раздать карандаши ребятам, чтобы у любых двух из них вместе были карандаши не более трех цветов. Дадим одному ребенку 4 карандаша второго цвета, одному 4 карандаша третьего цвета, одному – 4 карандаша четвертого цвета, одному по 2 карандаша первого и второго цвета, одному – по 2 карандаша первого и третьего цвета и еще одному по 2 карандаша первого и четвертого цвета.

Ответ. 3 ребят.

Задача 4. Когда Винни-Пух пришел в гости к Кролику, он съел 3 тарелки меда (м), 4 тарелки сгущенки (с) и 2 тарелки варенья (в), а после этого не смог выйти наружу из-за того, что сильно растолстел от такой еды. Но известно, что если бы он съел 2 тарелки меда, 3 тарелки сгущенки и 4 тарелки варенья или 4 тарелки меда, 2 тарелки сгущенки и 3 тарелки варенья, то спокойно смог бы покинуть нору гостеприимного Кролика. От чего больше толстеют: от варенья или от сгущенки?

Ответ. От сгущенки.

Решение. По условию

$$3м+4с+2в>2м+3с+4в,$$

откуда

$$м+с>2в. \qquad (1)$$

по условию же

$$3м+4с+2в>4м+2с+3в,$$

откуда

$$2с>м+в. \qquad (2)$$

Складывая неравенства (1) и (2), получаем

$$м+3с>м+3в,$$

откуда

$$с>в.$$

Задача 5. *Региональная олимпиада по математике. 8 класс. 2009-2010 уч. год. Задача 8.6.*

В компании из шести человек любые пять могут сесть за круглый стол так, что каждые два соседа окажутся знакомыми. Докажите, что и всю компанию можно усадить за круглый стол так, что каждые два соседа окажутся знакомыми.

Решение. Заметим, что у каждого в компании не менее трех знакомых. Действительно, если бы некто X был знаком менее, чем с тремя, то, исключив из компании одного из его знакомых, мы получили бы пятерку людей, в которой у X не более одного знакомого, т.е. посадить их за круглый стол невозможно.

Рассмотрим любых пятерых человек и рассадим их за круглый стол. Шестой человек знаком, по крайней мере, с тремя их них; значит, он знаком с какой-то парой сидящих рядом людей. Если мы посадим шестого между ними, то получим требуемую рассадку.

Задача 6.Однажды барон Мюнхгаузен, вернувшись с прогулки, рассказал, что половину пути он шёл со скоростью 5 км/ч, а половинувремени, затраченного на прогулку - со скоростью 6 км/ч. Неошибся ли барон?

Ответ. Барон ошибся.

Решение. Если барон половину затраченного времени шел со скоростью 6 км/ч, то со скоростью 5 км/ч он шел, самое большее, вторую половину этого времени, то есть не дольше, чем со скоростью 6 км/ч. Но это означает, что барон, идя со скоростью 5 км/ч, прошел меньшее расстояние, чем идя со скоростью 6 км/ч. Стало быть, со скоростью 5 км/ч он прошел меньше половины пути. (Причем в условии на сказано, что барон на прогулке шел только со скоростью 5 или 6 км/ч: оно не исключает того, что часть времени он мог двигаться и с другими скоростями.)

Задача 7.Родилась девочка. А позже, когда утомленная, но счастливая мама задремала, вдруг перед ней возникли три феи: добра(Д), красоты(К) и ума(У).

- Мы подойдем к колыбели девочки со своими дарами одна за другой в строго определенном порядке, при котором будут полностью удовлетворены пожелания каждой из нас, - сказала фея Д.

- Я согласна подойти к девочке последней, - продолжала фея Д. – Но при условии, что фея К принесет свои дары не первой. Если же я подойду первой, то фея К не должна быть последней.

Затем свои пожелания высказала фея У:

- Пусть буду последней я, тогда фея Д должна поднести свой дар не позже феи К. Если же я пойду первой, то фея Д пусть поднесет свой дар не раньше феи К.

А фея К сказала кратко:

- Если я не окажусь ни первой, ни последней, то фея Д одарит ребенка не раньше, чем фея У.

В каком порядке должны подойти эти феи к новорожденной, чтобы пожелания каждой из них оказались выполненными?

Решение.Всего возможно 6 порядков подхода фей к девочке:

П1(Д У К), П2(Д К У), П3(У Д К), П4(У К Д), П5(К Д У), П6(К У Д).

Условия феи Д запрещают П1 и П6. Условия феи У запрещают П3 и П5. Условия феи К запрещают П2. Остается один порядок, удовлетворяющий пожеланиям всех фей, - П4.

Ответ. Фея Ума подходит к новорожденной первой, фея Красоты – второй и фея Доброты – последней.

Задача 8. На перекрестке дорог встретились четыре путника: жители города лжецов (которые всегда лгут) и города рыцарей (которые всегда говорят правду) (при этом не все были жителями одного города). Первый сказал: «Кроме меня, здесь ровно один житель моего города». Второй добавил: «А из моего города – я один». Третий подтвердил слова второго: «Ты прав». А четвертый промолчал. Из какого города четвертый?

Решение. Из утверждения третьего следует, что он из одного города со вторым, но тогда второй уже не может говорить правду. Значит, по крайней мере, есть два лжеца (второй и третий). А теперь независимо от утверждения первого получается, что: либо он прав,и, следовательно, четвертый – рыцарь, либо он не прав и все равно четвертый - рыцарь (так как на встрече рыцари были). Таким образом, промолчавший – из города рыцарей.

Ответ. Четвертый из города рыцарей.

Задача 9. Боря, Витя, Гриша и Егор встретились и подружились в Артеке. Они приехали сюда из разных городов: один – из Твери, другой – из Омска, третий из Екатеринбурга, четвертый – из Казани.

Из какого города приехал каждый из них, если известно:

1) Боря и мальчик из Казани были поселены в одной комнате. Ни один из них никогда не был ни в Твери, ни в Екатеринбурге.

2) Гриша в волейбол играл в одной команде с мальчиком из Твери, а против них обычно сражался приятель из Казани.

3) Егор и мальчик из Твери увлекались игрой в шахматы.

Решение. Из первого условия: «Боря и мальчик из Казани были поселены в одной комнате» следует, что Боря не из Казани. Так как оба мальчика не были ни в Твери, ни в Екатеринбурге, то, очевидно, Боря приехал из Омска. Из второго условия можно сделать вывод, что Гриша не из Омска, и не из Твери, и не из Казани. Следовательно, Гриша приехал из Екатеринбурга. Из третьего условия следует, что Егор не из Твери, но из ранее сказанного - он не из Омска и не из Екатеринбурга. Значит, Егор прибыл из Казани. Тогда Витя, очевидно, из Твери.

Ответ.Боря приехал из Омска, Гриша - из Екатеринбурга, Егор – из Казани, Витя – из Твери.

Задача 10. В школьной математической олимпиаде приняли участие четыре мальчика – Саша, Павел, Толя, Коля – из разных классов и четыре девочки – Даша, Эля, Нина, Маша – по одной из тех же классов, что и мальчики. Нина решила 4 задачи, Даша - 3, Эля - 2, а Маша - только одну. Саша решил столько задач, сколько его одноклассница. Павел, Толя и Коля решили больше задач, чем их одноклассницы, соответственно вдвое, втрое и вчетверо. Всего было решено 32 задачи.Кто из этих девочек - одноклассница Толи?

Решение.Девочки решили 10 задач. Мальчики - 22. Пусть Саша решил m задач; Павел, Толя и Коля соответственно условию - 2n, 3p, 4q задач. В соответствии с тем, сколько задач решила каждая из девочек, значениями m, n, p и q могут быть только числа 1, 2, 3, 4, которые должны быть распределены между m, n, p и q так, чтобы было верным равенство$22 = m + 2n + 3p + 4q$. Простым перебором вариантов (самый простой способ перебрать значения 4, 3, 2, 1 для q) устанавливаем единственно возможную комбинацию: 22=1*3+2*4+3*1+4*2. (* - знак умножения). По условию Толя решил втрое больше задач, чем его одноклассница, следовательно, это Маша.

Ответ. Маша.

3. Задания для самостоятельной работы

Задача 1. На острове живут только рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Однажды все они сели по кругу, и каждый сказал: «Среди двух моих соседей есть лжец!». Затем они сели по кругу в другом порядке, и каждый сказал: «Среди двух моих соседей нет рыцаря!». Могло ли на острове быть 2017 человек?

Задача 2.На одной из улиц дачного поселка только пять домов. Они окрашены в разные цвета, и занимают их семьи поэта, писателя, критика, журналиста и редактора. В доме каждой семьи живет любимая птичка. Глава семьи получает на завтрак любимый им напиток, после чего отправляется в город, пользуясь любимым способом передвижения.

Поэт пользуется велосипедом. Редактор живет в красном доме. Критик живет в крайнем доме слева, рядом расположен голубой дом.

Тот, кто ездит на мотоцикле, живет в среднем доме.

Тот, кто живет в зеленом доме, расположенном рядом с белым, справа отнего, всегда отправляется в город пешком.

В доме, где живет снегирь, на завтрак всегда бывает молоко.

Тот, кто на завтрак получает какао, живет в доме, соседнем с тем домом, где живет синица.

В желтом доме на завтрак подают чай.

Живущий рядом с любителем канареек утром пьет чай.

Писатель пьет только кофе.

Тот, кто ездит на автомобиле, любит пить томатный сок.

В доме журналиста живет попугайчик.

А у кого живет сорока?

Задача 3.Математик шел домой вверх по течению ручья со скоростью, в полтора раза большей, чем скорость течения, и держал в руках шляпу и палку. На ходу он бросил в ручей шляпу, перепутав ее с палкой. Вскоре, заметив ошибку, он бросил палку в ручей и побежал назад со скоростью вдвое больше той, с которой шел вперед. Догнав плывущую шляпу, он мгновенно достал ее из воды, повернулся и как ни в чем ни бывало пошел домой с прежней скоростью. Через 40 секунд после того, как он догнал шляпу, он встретил палку, плывущую ему навстречу. Насколько раньше пришел бы он домой, если бы все время шел вперед?

Решение вступительной контрольной работы

1. В студенческой группе может быть от 30 до 40 студентов. В группе математиков тех, кто учит английский, в 2 раза меньше, чем тех, кто его не учит. А тех, кто учит немецкий, в 3 раза меньше, чем тех, кто его не учит. Сколько студентов в группе математиков?

   Решение. Пусть английский язык учит x ребят, тогда не учит 2x ребят. Всего в группе 3x ребят, иколичество студентов в группе делится на 3. Аналогично, пусть немецкий учит y ребят, тогда не учит 3уребят. Итак, всего в группе 4y ребят, и количество студентов в группе делится на 4.Число студентов в группе делится и на 3, и на 4, то есть оноделится на 12. Единственное подходящее число, большее 30 именьшее 40, - это 36.

2. Можно ли поставить в одну линию белые, синие и красные кубики так, чтобы среди любых двух идущих подряд кубиков был хотя бы один белый, среди любых трёх идущих подряд – хотя бы один синий, а среди любых пяти идущих подряд – хотя бы один красный. Рассмотреть нужно два случая: когда общее число кубиков30, и когда 32.

   Ответ. Нельзя, если их 30 и можно, если 32.

   Решение.Разбив 30 кубиков на 15 пар соседних кубиков, убеждаемся, чтосреди выложенных кубиков не меньше 15 белых. Разбив их на 10 троек подряд идущих кубиков, убеждаемся, что среди выложенных кубиков не меньше 10 синих. Наконец, разбивих же на 6 пятёрок подряд идущих кубиков, видим, что среди выложенных кубиков неменьше 6 красных. Получается, что кубиков должно быть не меньше, чем 15 + 10 + 6 = 31, аих только 30 в первом случае и 32 во втором.

3. Будет ли число 11…11 (27 единиц) делиться на 27, а на 81?

   Ответ. На 27 – да, на 81 – нет.

   Решение. Так как

$$\underbrace{111\ldots111}_{27\text{ единиц}} = \underbrace{111\ldots111}_{9\text{ единиц}} \cdot 1\underbrace{00\ldots00}_{8\text{ нулей}}1\underbrace{00\ldots00}_{8\text{ нулей}}1.$$

   Первый сомножитель делится на 9, второй – только на 3. Поэтому произведение делится на 27, но не делится на 81.

4. В корзине 101 шарик. Каждый покрашен в какой-либо цвет. Найдутся ли в корзине либо 11 шариков разных цветов, либо 11 одного цвета?

   Ответ. Да.

   Решение.Если нет 11 шариков разных цветов, то все 101 шарик – не более чем 10 различных цветов. Но если шариков каждого из цветов не больше 10, то всего шариков не более 100, что противоречит условию.

5. Несколько бетонных блоков весят вместе 10 т, при этом каждый блок весит не более 1 т. На каком наименьшем количестве машин вместимостью 3 т можно увезти этот груз за один заезд?

   Ответ. 5.

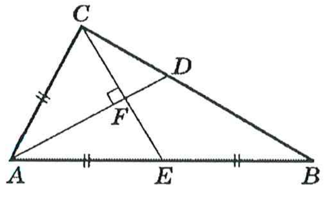
   Решение. На 5 машинах действительно можно вывезти весь груз за один раз. На каждой из 4 машин можно увезти более 2т блоков, т.е. по крайней мере они увезут 8т. Оставшиеся блоки увезет 5 машина (их суммарный вес меньше 2т). Покажем, что 4 машины не увезут весь груз. Например, если изначально было 13 блоков по 10/13 тонн каждый, то одна машина увезла бы только 3 блока, и 4 машины увезут только 12 из 13 блоков.

6. Сравните 31^{11} и 17^{14}.

   Ответ.$31^{11}<17^{14}$.

   Решение.$31^{11} < 32^{11} = 16^{11}2^{11} < 16^{11}2^{12} = 16^{14} < 17^{14}$.

7. В треугольнике *ABC* медиана *CE* перпендикулярна биссектрисе *AD*. Докажите, что *AB*=2*AC*.



Доказательство.Указанные медиана и биссектриса не могут выходить из одной вершины, так как иначе угол при этой вершине был бы больше 180°. Пусть *CE*и *AD*пересекаются в точке*F*. Тогда*AF* –

биссектриса и высота в треугольнике *ACE*, тогда он равнобедренный *(AC=AE)*, а так как *CE* – медиана, то *AB=2AE* и, следовательно, *AB=2AC*.

8. Определите, будет ли простым или составным число $n^3 + 3n^2 + 6n + 8$ для всевозможных натуральных значений n.

Ответ. Да.

Решение. Имеем

$$(n^3 + 8) + (3n^2 + 6n) = (n + 2)(n^2 - 2n + 4) + 3n(n + 2) =$$
$$= (n + 2)(n^2 + n + 4).$$

Каждый из множителей больше 1, поэтому число – составное.

9. Можно ли на ребрах куба расставить числа от 1 до 12 (по одному числу на каждом ребре) так, чтобы сумма чисел на трех ребрах, выходящих из одной вершины, была одной и той же для каждой вершины куба?

Ответ. Нельзя.

Решение. Пусть мы нашли такую расстановку и сумма в любой тройке чисел, выходящих из одной вершины равна N. Тогда сумма во всех вершинах – $8N$. Но в этом случае каждое ребро учитывается 2 раза и $8N=2(1+2+\ldots+12)=12\cdot13$. Тогда $N=39/2$ - не целое, что невозможно. Получили противоречие.

10. Встретились старые приятели. У каждого из них уже были семьи. И на вопрос друга один из отцов ответил: «У меня трое детей. Когда родился наш первый ребенок, сумма возрастов всех членов семьи была 45 лет, год назад, когда у нас родился третий ребенок, сумма возрастов стала 70 лет. А в этом году сумма возрастов наших детей – 14 лет». Определите возраст каждого ребенка.

Ответ. 1, 5 и 8 лет.

Решение. Если первый старше второго ребенка на x лет, а второй старше третьего на y лет, то $70\text{-}45=3(x+y)+y$, к моменту рождения третьего ребенка возраст родителей увеличился на $(x+y)$ лет, а возраст второго – на y лет. Аналогично $(x+y+1)+(y+1)+1=14$. Получается система уравнений

$$\begin{cases} 3x + 4y = 25, \\ x + 2y = 11, \end{cases}$$

из которой $x=3$, $y=4$.

11. Может ли разность двух чисел вида $n^2 + 4n$ (n – натуральное) быть равной числу 2018, а 2020?

Ответ. 2018 – не может, 2020 – может.

Решение. Пусть $x=n^2+4n$, $y=m^2+4m$. Тогда $x\text{-}y=(n\text{-}m)(n+m+4)$. Числа в скобках одинаковой четности, поэтому их произведение кратно 4. 2018 не кратно 4, 2020 – кратно.

12. Докажите справедливость неравенства

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \cdots + \frac{2017}{2018!} < 1.$$

Решение.

$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \cdots + \frac{2017}{2018!} = \left(\frac{2}{2!} - \frac{1}{2!}\right) + \left(\frac{3}{3!} - \frac{1}{3!}\right) + \cdots + \left(\frac{2018}{2018!} - \frac{1}{2018!}\right) = \left(1 - \frac{1}{2!}\right) + \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2017!} - \frac{1}{2018!}\right) = 1 - \frac{1}{2018!} < 1$, что и требовалось доказать.

13. Найдите все возможные значения выражения $\frac{3x-y}{x+5y}$, если числа x, y удовлетворяют равенству $\frac{2x}{x+y} + \frac{y}{x-y} = 2$.

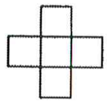
Ответ. 1 и 3.

Решение. Из данного равенства следует, что $2x\cdot(x-y)+y\cdot(x+y)=2(x^2-y^2)$, $y\cdot(3y-x)=0$, откуда $y=0$или $x=3y$.
В первом случае, если $y=0$, то данное равенство выполняется при всех $x\neq 0$, а значение выражения $\frac{3x-y}{x+5y}$при всех таких xи yравно 3. Если же $x=3y$и xи yотличны от нуля, то данное равенство выполняется, а значение выражения $\frac{3x-y}{x+5y}$при всех указанных xи yравно 1.

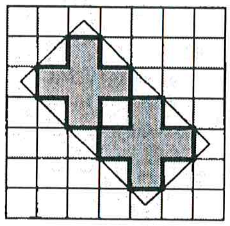
14. Высоты треугольника MNK пересекаются в точке D. Известно, что $MN=KD$. Найдите угол MKN.

Ответ. 45°.
Решение. Пусть P– основание высоты, опущенной из вершины Mна сторону KN. Углы DKNи PMNравны как острые углы с взаимно перпендикулярными сторонами. Следовательно, $\Delta KDP=\Delta MNP$(по гипотенузе и острому углу). Поэтому $MP=KP$, т.е. треугольник MPKравнобедренный и прямоугольный, следовательно, угол $MKN=45°$.

15. Можно ли изготовить прямоугольную коробку с площадью основания 16 кв. см так, чтобы в нее уместились две детали указанного вида, если высота коробки 1 см, а детали состоят и пяти кубиков 1см x1см x1 см, склеенных между собой.



Ответ. Да.
Решение. Нарисованный прямоугольник имеет площадь $11 + 8\cdot\frac{1}{2} + 4\cdot\frac{1}{4} = 16$ (см^2). Он и будет основанием нашей коробки, высота коробки будет 1 см.



Литература

1. Васильев Н.Б., Гутенмахер В.Л., Раббот Ж.М., Тоом А.Л. Зоачные математические олимпиады.- М.:Наука, 1986.
2. Всероссийские олимпиады школьников по математике 1993–2009: Заключительные этапы / Н. Х. Агаханов и др. Под ред. Н. Х. Агаханова. – М.:МЦНМО, 2010.
3. Гальперин. Г.А., Толпыго А.К. Московские математические олимпиады. М.: Просвещение, 1986.
4. Журналы “Математика в школе”, “Квант”.

5. Кордемский Б.А., Ахадов А.А. Удивительный мир чисел. М.: Просвещение, 1986.

6. Спивак, А.В. Математический кружок.- М.: Посев, 2003.

7. Фарков, А.В. Математические олимпиады.– М.: Экзамен, 2006 .

8. http://kvant.mccme.ru/ - журнал “Квант”.

9. http://lib.mexmat.ru/forum/ - форум мехмата МГУ, обсуждаются вопросы, проблемы и задачи по математике.

10. http://olympiads.mccme.ru/mmo/ - Московская математическая олимпиада.

11. http://www.metaschool.ru - Интернет-кружки, интернет-олимпиады, интернет-репетитор.

12. http://www.rusolymp.ru/ – портал Всероссийской олимпиады школьников.

13. http://www.school.mipt.ru/ - ЗФТШ МФТИ.

14. http://www.turgor.ru/ - Турнир Городов - международная математическая олимпиада для школьников.

15. http://www.zaba.ru/ - Математические олимпиады и олимпиадные задачи.